Askisopolis.gr

Πρόσεχε μην κάνεις λάθος!

Νίκος Τούντας

www.askisopolis.gr

Πρόσεχε μην κάνεις λάθος!

Λίγα λόγια

Εγκαινιάζουμε μία νέα ανάρτηση για τα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου στο Ασκησόπολις, με αποδέκτες τους μαθητές, καθώς και τους δασκάλους τους. Σκοπός είναι να προσπαθήσουμε να τονίσουμε λεπτά σημεία της ύλης στα οποία μπορούν να γίνουν συχνά λάθη. Λάθη που γίνονται καθημερινά μέσα στις τάξεις.

Δίνεται λοιπόν μία εφαρμογή στην οποία πρέπει να επιλέξουμε την σωστή απάντηση. Δεν είναι ερώτηση θεωρίας, αλλά κανονική άσκηση η οποία χρειάζεται χαρτί και μολύβι. Υπάρχει μία σωστή απάντηση και κάνοντας κάποιο λάθος κατά την επίλυση της άσκησης καταλήγουμε στις άλλες λανθασμένες. Δηλαδή, το λάθος υπάρχει κίνδυνος να νομίζουμε ότι είναι σωστό. Για αυτό και ο τίτλος «Πρόσεχε μην κάνεις λάθος!».

Στο τέλος υπάρχουν αναλυτικές λύσεις, καθώς και τα πιθανά λάθη που μπορεί να γίνουν και να μας οδηγήσουν σε κάποια από τις υπόλοιπες απαντήσεις.

Καλή διασκέδαση!

Νίκος Τούντας

Επικοινωνία:
Τηλέφωνο: 6980001913
Email: ntountas.maths@yahoo.com
Facebook: Νίκος Τούντας
www.askisopolis.gr / Χρήστης: Νίκος Τούντας

Το φυλλάδιο αυτό κυκλοφορεί μόνο σε ψηφιακή μορφή. Το γεγονός αυτό δεν σημαίνει ότι δεν είναι προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας. Επιτρέπεται ελεύθερα η χρήση χωρίς να επεξεργαστεί το περιεχόμενο.

Ασκησόπολις

Askisopolis

Ο πιο πλούσιος κόσμος θεμάτων και ασκήσεων

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Προσανατολισμού

Πρόσεχε μην κάνεις λάθος!

2η Άσκηση

2023 – 2024

Έως μονοτονία – ακρότατα συνάρτησης

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(x-2)^2}}$ και $g(x)=\dfrac{1}{|x-2|+2-x}$.

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση σε καθένα από τα παρακάτω.

1) Η συνάρτηση $S=f+g$:

Α. Δεν ορίζεται **Β.** Έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty,2)$

2) Η συνάρτηση $S=f+g$:

Α. Είναι η σύνθεση της $A(x)=\dfrac{3}{2x}$ με την $B(x)=2-x$.

Β. Είναι η σύνθεση της $B(x)=2-x$ με την $A(x)=\dfrac{3}{2x}$.

Γ. Είναι η σύνθεση της $B(x)=2-x$, $x<2$ με την $A(x)=\dfrac{3}{2x}$.

3) Η συνάρτηση $\varphi(x)=\begin{cases} f(x)\,, & x<2 \\ \dfrac{1}{4}\,, & x=2 \end{cases}$:

Α. Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,2)$. **Β.** Είναι γνησίως αύξουσα.

4) Αν $\varphi(x)$ είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος τότε η ανίσωση $\varphi(x)<\dfrac{1}{4}$ έχει λύσεις:

Α. $x<2$ **Β.** $x<-2$

5) Για την συνάρτηση $h(x)=\eta\mu f(x)+\sigma\upsilon\nu f(x)$ ισχύει ότι:

Α. Έχει ολικό ελάχιστο το -2 και ολικό μέγιστο το 2.

Β. Η h δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Γ. Το σύνολο τιμών της h είναι υποσύνολο του $(-2,2)$.

Νίκος Τούντας

Askisopolis
Ασκησόπολις

ΛΥΣΗ

1) Η f ορίζεται όταν $(x-2)^2>0 \Leftrightarrow x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$ άρα $D_f=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)=\mathbb{R}-\{2\}$
Η g ορίζεται όταν $|x-2|+2-x\neq 0 \Leftrightarrow |x-2|\neq x-2 \Leftrightarrow x-2<0 \Leftrightarrow x<2$ άρα $D_g=(-\infty,2)$
Συνεπώς η συνάρτηση $S=f+g$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty,2)$ και σωστή απάντηση είναι η Β.

ΕΚΑΝΑ ΛΑΘΟΣ! Συχνά λάθη που γίνονται:
α) $(x-2)^2>0 \Leftrightarrow x-2>0 \Leftrightarrow x>2$
β) $|x-2|+2-x\neq 0 \Leftrightarrow |x-2|\neq x-2 \Leftrightarrow (x-2)^2\neq (x-2)^2$ αδύνατη. (Λάθος γιατί υψώνουμε στο τετράγωνο χωρίς να ξέρουμε αν είναι ομόσημα τα δύο μέλη)
Αν κάναμε κάποιο από τα παραπάνω λάθη θα καταλήγαμε στην απάντηση Α.

2) Για κάθε $x<2$ είναι $S(x)=f(x)+g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(x-2)^2}}+\dfrac{1}{|x-2|+2-x}=\dfrac{1}{|x-2|}+\dfrac{1}{2-x+2-x}=$

$$=\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2(2-x)}=\frac{3}{2(2-x)}$$

Αν $A(x)=\dfrac{3}{2x}$, $x\neq 0$ και $B(x)=2-x$, $x<2$ τότε η $A\circ B$ ορίζεται όταν: $\begin{cases} x\in D_B \\ B(x)\in D_A \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ 2-x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x<2 \text{ και είναι } (A\circ B)(x)=A(B(x))=\frac{3}{2B(x)}=\frac{3}{2(2-x)},\ x<2.$$

Άρα σωστή απάντηση είναι η Γ.

ΕΚΑΝΑ ΛΑΘΟΣ! Λάθη που μπορεί να γίνουν:
α) Αν η Β(x) δεν έχει περιορισμό το $x<2$ τότε το $D_{A\circ B}=\mathbb{R}-\{2\}$ και τότε η $A\circ B$ δεν είναι η S(x).
β) Όταν λέμε σύνθεση της Α με την Β εννοούμε την $B\circ A$ και τότε προφανώς δεν είναι η S(x).
Αν κάναμε κάποιο από τα παραπάνω θα καταλήγαμε είτε στην Α είτε στην Β απάντηση.

3) Είναι $\varphi(x)=\begin{cases} f(x), & x<2 \\ \dfrac{1}{4}, & x=2 \end{cases}=\begin{cases} \dfrac{1}{2-x}, & x<2 \\ \dfrac{1}{4}, & x=2 \end{cases}$

Για κάθε $x_1<x_2<2$ είναι $-x_1>-x_2>-2 \Leftrightarrow 2-x_1>2-x_2>0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2-x_1}<\dfrac{1}{2-x_2} \Leftrightarrow \varphi(x_1)<\varphi(x_2)$

Άρα $\varphi\nearrow(-\infty,2)$. Παρατηρούμε ότι $\varphi(0)=\dfrac{1}{2}>\varphi(2)=\dfrac{1}{4}$ άρα η φ δεν είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της. Άρα σωστή η απάντηση Α.

ΕΚΑΝΑ ΛΑΘΟΣ! Αν λέγαμε ότι είναι γνησίως αύξουσα μελετώντας μόνο το διάστημα $(-\infty,2)$ θα ήταν λάθος όπως βλέπουμε στην λύση. Χρειάζεται να εξεταστεί και η μεμονωμένη τιμή.

Askisopolis

4) Όπως είδαμε προηγουμένως είναι $\varphi \nearrow (-\infty, 2)$. Παρατηρούμε ότι $\varphi(-2) = \frac{1}{4}$ άρα για $x < 2$ έχουμε $\varphi(x) < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \varphi(x) < \varphi(-2) \overset{\varphi\nearrow}{\Leftrightarrow} x < -2$ ενώ για $x = 2$ είναι $\varphi(2) < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{4}$ αδύνατη.
Άρα σωστή είναι η απάντηση Β.

ΕΚΑΝΑ ΛΑΘΟΣ! Αν λύναμε ως εξής: $\varphi(x) < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \varphi(x) < \varphi(2) \overset{\varphi\nearrow}{\Leftrightarrow} x < 2$ τότε θα ήταν σωστή η απάντηση Α, όμως θα κάναμε ένα σοβαρό λάθος. Είναι $\varphi \nearrow (-\infty, 2)$ και όχι $\varphi \nearrow (-\infty, 2]$ ώστε να μπορούμε να κάνουμε το παραπάνω.

5) Είναι $-1 \le \eta\mu f(x) \le 1$ (1) και $-1 \le \sigma\upsilon\nu f(x) \le 1$ (2) για κάθε $x < 2$ άρα προσθέτοντας κατά μέλη τις (1),(2) είναι $-2 \le h(x) \le 2$.
Έστω ότι $h(x_1) = -2 \Leftrightarrow \eta\mu f(x_1) + \sigma\upsilon\nu f(x_1) = -2$ (3). Λόγω των (1),(2) η (3) θα ισχύει όταν $\eta\mu f(x_1) = -1$ και $\sigma\upsilon\nu f(x_1) = -1$. Τότε θα είναι $\eta\mu^2 f(x_1) + \sigma\upsilon\nu^2 f(x_1) = 1 \Leftrightarrow 2 = 1$ άτοπο.
Έστω ότι $h(x_2) = 2 \Leftrightarrow \eta\mu f(x_2) + \sigma\upsilon\nu f(x_2) = 2$ (4). Λόγω των (1),(2) η (4) θα ισχύει όταν $\eta\mu f(x_2) = 1$ και $\sigma\upsilon\nu f(x_2) = 1$. Τότε θα είναι $\eta\mu^2 f(x_2) + \sigma\upsilon\nu^2 f(x_2) = 1 \Leftrightarrow 2 = 1$ άτοπο.
Άρα τελικά είναι $-2 < h(x) < 2$ και σωστή είναι η απάντηση Γ.

ΕΚΑΝΑ ΛΑΘΟΣ! Λάθη που ενδέχεται να γίνουν:
α) Είναι $-2 \le h(x) \le 2$ άρα η h έχει μέγιστη τιμή το -2 και ελάχιστη τιμή το 2. (Λάθος γιατί δεν έχουμε εξετάσει αν παίρνει τις τιμές -2 και 2, τις οποίες όπως είδαμε εν τέλη δεν τις παίρνει)
β) Τελικά είναι $-2 < h(x) < 2$ άρα η h δεν έχει ακρότατα. (Λάθος γιατί μπορεί να έχει ακρότατα m και M με $-2 < m < M < 2$).

Ασκησόπολις